Пусть $W_1(x_1,x_2) = -3x_1+5x_2$, $W_2(x_1,x_2) = 4x_1-2x_2$.

$(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]=X$.

Найти множество $P(X,W)$.

Две способа решения

использование свёртки $F_1(x,\lambda)=\lambda W_1+(1-\lambda)W_2 =$

$= \lambda(-3x_1+5x_2)+(1-\lambda)(4x_1-2x_2) =$

$= x_1(4-7\lambda)+x_2(7\lambda-2)$, $\quad 0<\lambda<1$

$X_1(\lambda)=\operatorname{Argmax}\limits_{x\in X} F_1(x,\lambda)\subset P(X,W)$.

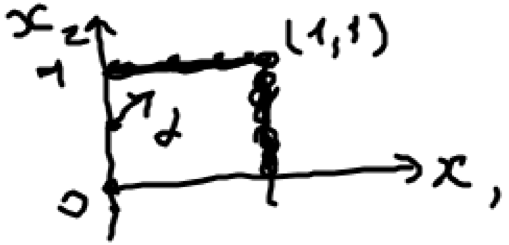
$0<\lambda<\frac{2}{7}<\frac{4}{7} \Rightarrow X_1(\lambda)=\{(1,0)\}$ т.к. $4-7\lambda>0$, $7\lambda-2<0$

$\lambda=\frac{2}{7}$ $\quad X_1(\lambda)=[(1,0),(1,1)]$, т.к. $4-7\lambda>0$, $\underset{\Downarrow}{7\lambda-2=0}$ $x_2\in[0,1]$.

$\frac{2}{7}<\lambda<\frac{4}{7}$ $\quad X_1(\lambda)=\{(1,1)\}$, т.к. $4-7\lambda>0$, $7\lambda-2>0$

$\lambda=\frac{4}{7}$ $\quad X_1(\lambda)=[(0,1),(1,1)]$ т.к. $4-7\lambda=0$, $7\lambda-2>0$.

$\frac{4}{7}<\lambda<1$ $\quad X_1(\lambda)=\{(0,1)\}$ т.к. $4-7\lambda<0$, $7\lambda-2>0$



Докажем, что две стороны квадрата принадлежат $P(X, W)$. Покажем, что другие точки из X не принадлежат $P(X, W)$.

$W'_{1x} = (W'_{1x_1}, W'_{1x_2}) = (-3, 5)$ $\quad W'_{2x} = (W'_{2x_1}, W'_{2x_2}) = (4, -2)$

– градиенты критериев. Возьмём вектор $\alpha = (1, 1)$

Тогда $(\alpha, W'_{1x}) = 2$, $(\alpha, W'_{2x}) = 2$.

Поэтому по направлению α оба критерия возрастают

Если x: $x_1 < 1$ и $x_2 < 1$, то направление α допустимо

$\Rightarrow \quad x \notin P(x, W)$.

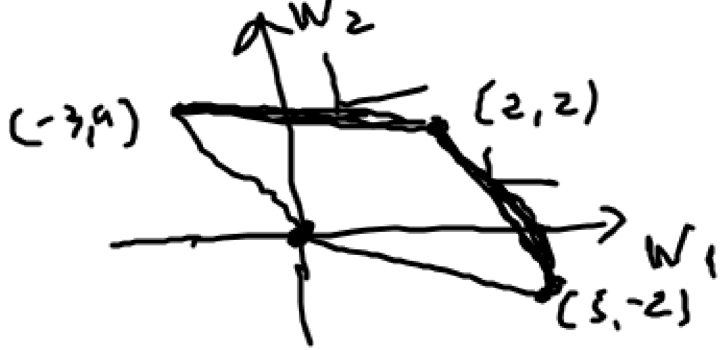
Другой способ решения. Найдём $W(X)$ – образ X на плоскости (W_1, W_2) – множество всех векторных оценок.

Найдём крайние точки множества $W(X)$, т.е. $(W(X))^{ext}$. Отображение $W: X \to W(X)$ линейно.

Поэтому $W(X^{ext}) = (W(X))^{ext}$

$X^{ext} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ – вершины квадрата X

$(W(X))^{ext} = \{(0,0), (5,-2), (-3,4), (2,2)\}$.



отрезки $[(-3,4),(2,2)]$ и $[(2,2),(5,-2)]$ – множество оптимальных по Парето оценок – образ множества $P(X,W)$. Находим прообраз

$P(X,W) = [(0,1),(1,1)] \cup [(1,0),(1,1)]$.

$P(X,W)$

Использовали правило сдвинутого ортанта.